Fondamenti di Elaborazione di Immagini

Operazioni sulle immagini

Raffaele Cappelli

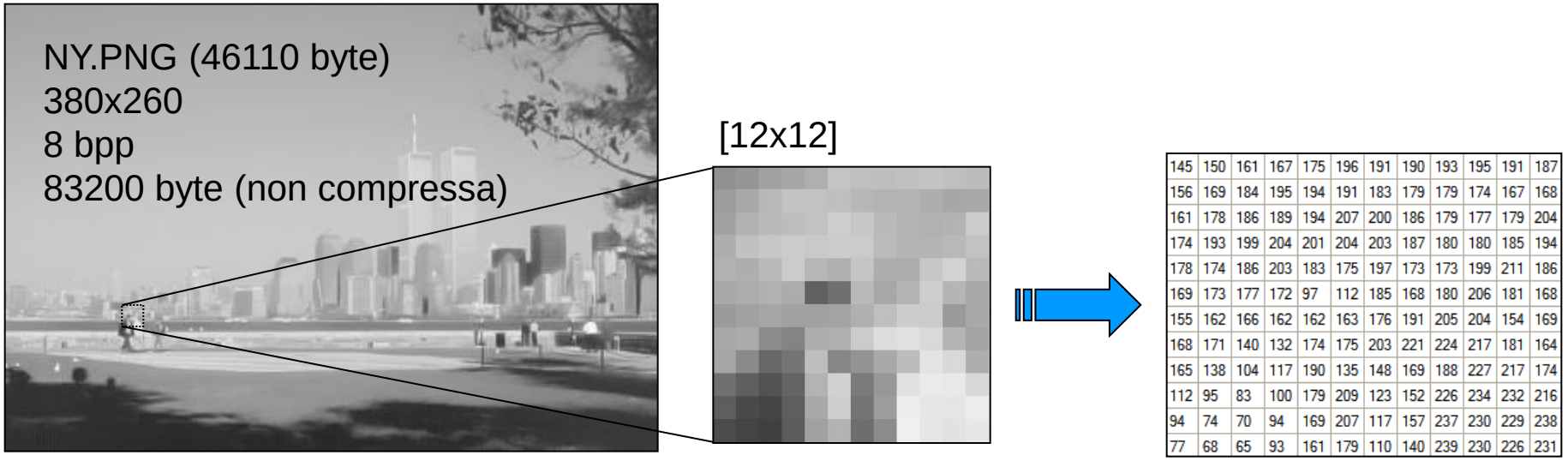
raffaele.cappelli@unibo.it

Contenuti

- Concetti di base
  - Le immagini digitali
  - Immagini a colori: modello RGB e HSL
- Operazioni sui pixel
  - Binarizzazione e operazioni aritmetiche su immagini
  - Operazioni sull'istogramma
- Operazioni locali
  - Filtri digitali e convoluzione
- Operazioni globali
  - Ruotare e ridimensionare un'immagine

Immagini digitali

- Immagine raster
  - Una matrice di valori (pixel - picture element): ognuno rappresenta il dato (campionato e quantizzato) misurato da un sensore
  - Alcune caratteristiche rilevanti:
    - Dimensione (WxH) e Risoluzione (DPI)
    - Formato dei pixel (Bianco/Nero, Grayscale, Colore)
    - Formati di memorizzazione (JPG, PNG, BMP,...) e compressione
    - Occupazione di memoria (non compressa): WxHxDepth (Depth = bit per pixel)



Immagini digitali (2)

- Immagini vettoriali
  - Costituite da un insieme di primitive geometriche (linee, archi, ...)
  - Ampiamente utilizzate in CAD, GIS, Computer grafica
  - Talvolta utilizzate anche in image analysis
  - Visualizzate su schermo solo a seguito di conversione in immagini raster

Immagini grayscale in C#

- 8bpp: un byte per ogni pixel
- Immagine allocata come array bi-dimensionale

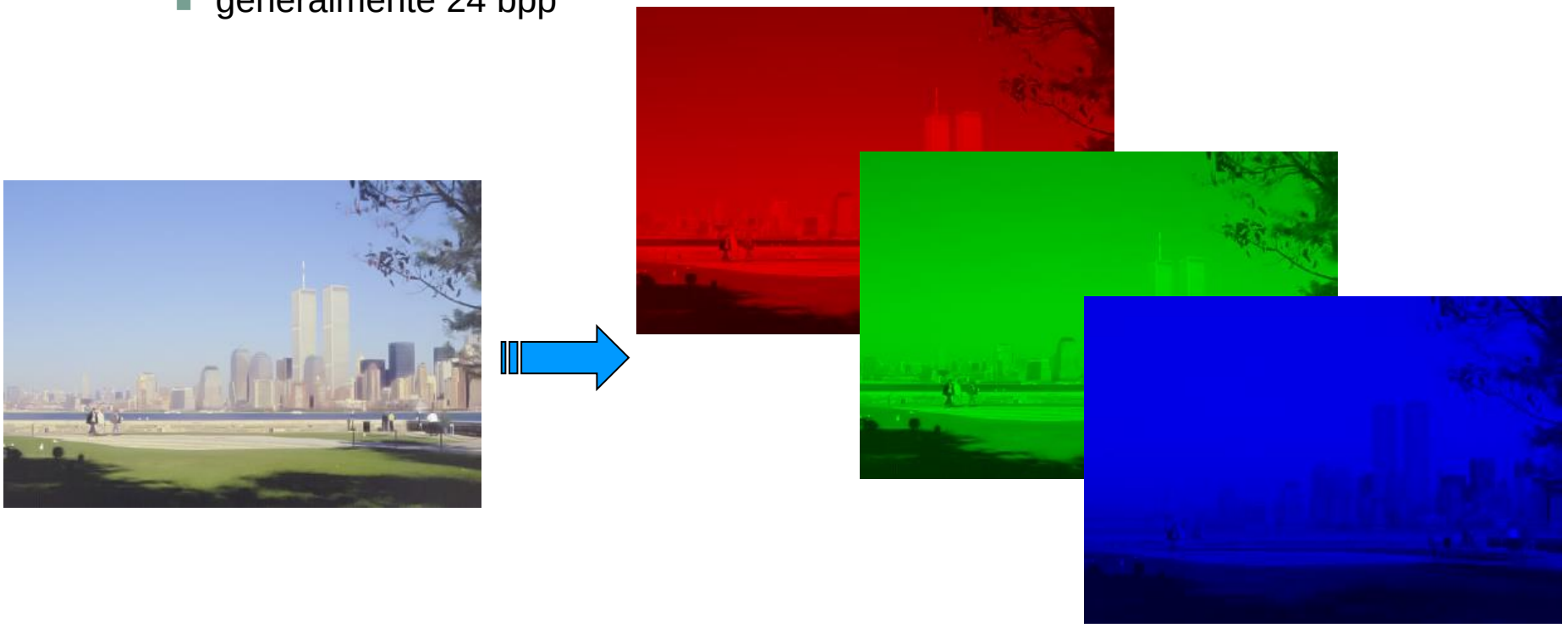
```
int w = 380;
int h = 260;

byte[,] img = new byte[h, w];

for (int y = 0; y < h; y++)
    for (int x = 0; x < w; x++)
        img[y, x] /= 2;
```

- Immagine allocata come array mono-dimensionale
  - Più efficiente
  - In genere è l'approccio preferibile

```
int w = 380;
int h = 260;
int n = w * h;
byte[] img = new byte[n];
for (int i = 0; i < n; i++)
    img[i] /= 2;
```

Immagini a colori

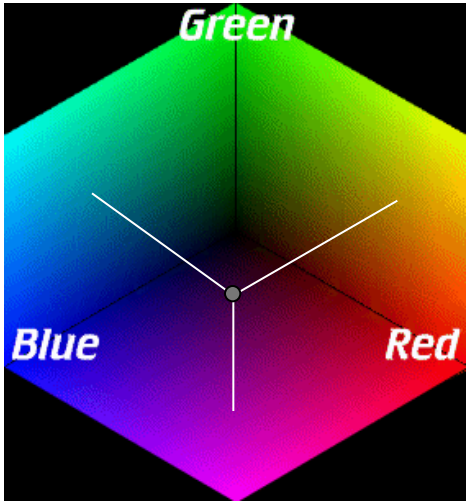
- Palette
  - I valori dei pixel sono indici all'interno di una tavolozza (palette) di colori
  - Immagini solitamente a 16 o 256 colori
- Formato RGB
  - Ogni pixel contiene un valore per ciascuna delle 3 componenti
    - generalmente 24 bpp



Il modello RGB

- Modello additivo
  - I colori sono ottenuti mediante combinazione dei 3 colori primari Red, Green, Blue
  - Il più utilizzato in informatica per la semplicità con cui si generano i colori

- Spazio RGB
  - Ogni colore può essere considerato come un punto in uno spazio a tre dimensioni
  - Non idoneo per il raggruppamento spaziale di colori percepiti come simili dall'uomo

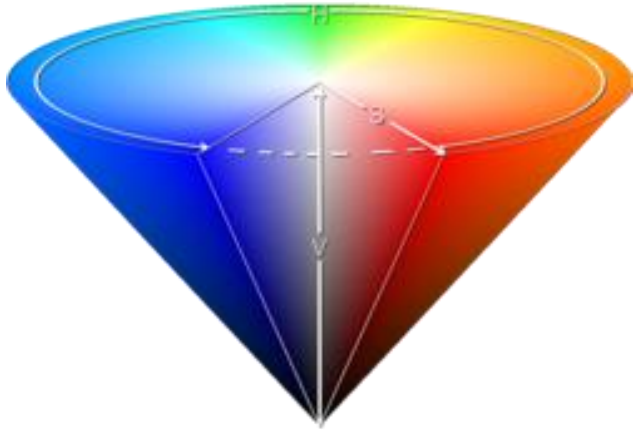


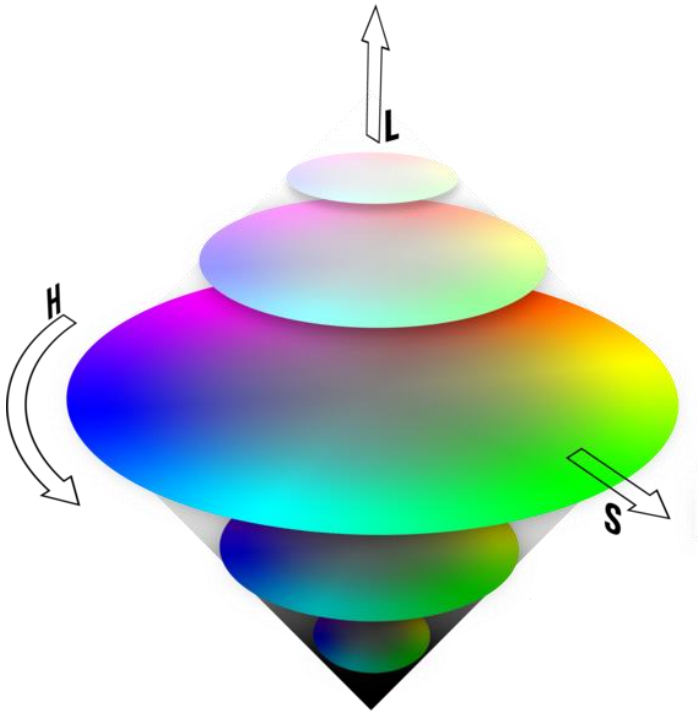
I modelli HS*

- Modelli basati sulle caratteristiche con cui un essere umano usualmente definisce un colore:
  - Tinta (Hue)
  - Saturazione
  - Luminosità
- Vantaggi
  - Possibilità di specificare i colori in modo intuitivo
  - Possono essere utilizzati più efficacemente per localizzazione e riconoscimento di pattern
- Due modelli principali:
  - HSV (o HSB)
  - HSL

I modelli HS* (2)

- HSV
  - Può essere rappresentato come un cono in cui l'asse verticale codifica V
- HSL
  - Può essere rappresentato come un doppio cono in cui l'asse verticale codifica L
- HSL meglio rappresenta i concetti di saturazione e luminosità
  - Variando S ci si muove sempre da un tono di grigio (S=0) al colore completamente saturo (S=1)
  - Variando L ci si muove sempre dal nero (L=0) al bianco (L=1)

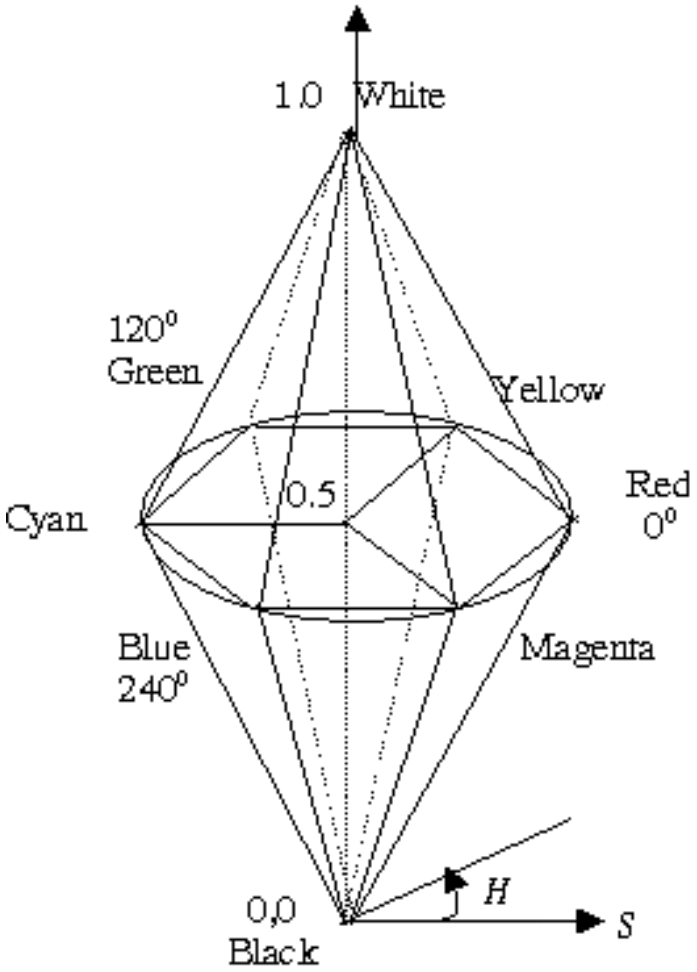




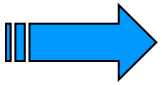
Il modello HSL

- Intervallo valori
  - Hue: [0..2π]
  - Saturation: [0..1]
  - Value: [0..1]
  - Spesso si utilizzano 3 byte, discretizzando i valori nell'intervallo [0..255]

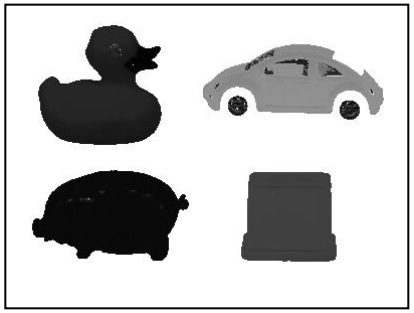
- Generalmente, anziché rappresentare lo spazio colore mediante due coni, si utilizzano due piramidi a base esagonale (il calcolo risulta più semplice ed efficiente)



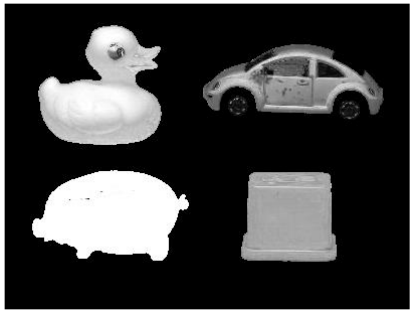
HSL – Esempi



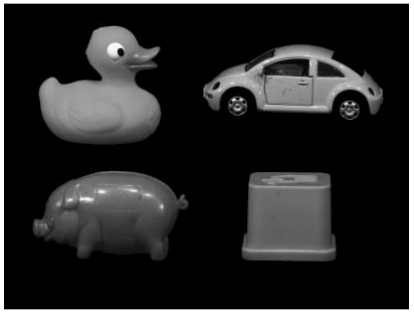
H



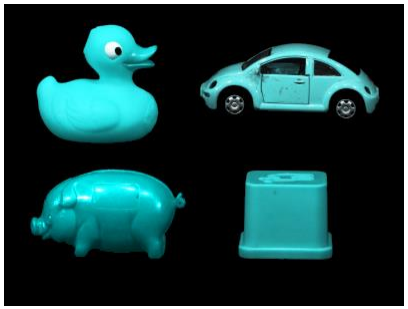
S



L

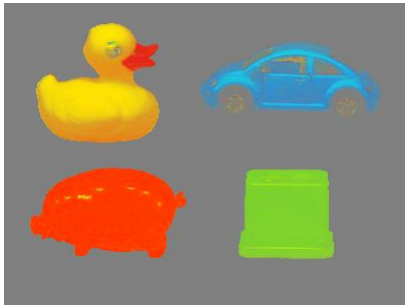


H = π



H = π/2

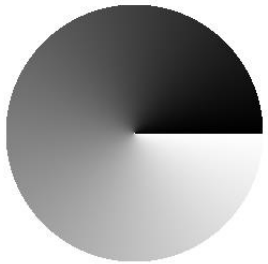
L = 0.5



S = 0.25

H += π/2

H += π



Conversione RGB →HSL

caso acromatico

$$H = \begin{cases} undefined & \text{if } C_{max} = C_{min} \\ \frac{\pi}{3}\left(\frac{G-B}{C_{max}-C_{min}}\right) & \text{if } C_{max} = R \\ \frac{\pi}{3}\left(2+\frac{B-R}{C_{max}-C_{min}}\right) & \text{if } C_{max} = G \\ \frac{\pi}{3}\left(4+\frac{R-G}{C_{max}-C_{min}}\right) & \text{if } C_{max} = B \end{cases}$$

$R, G, B \in [0,1]$

$C_{max} = \max\{R, G, B\}$

$C_{min} = \min\{R, G, B\}$

$H \in [0, 2\pi]$

$S, L \in [0,1]$

$$\text{if } H < 0 \rightarrow H = H + 2\pi$$

$$L = \tfrac{1}{2}(C_{max} + C_{min})$$

$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } C_{max} = C_{min} \\ \frac{C_{max}-C_{min}}{2L} & \text{if } 0 < L \leq \frac{1}{2} \\ \frac{C_{max}-C_{min}}{2-2L} & \text{if } L > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Conversione HSL → RGB

$H \in [0, 2\pi]$

$S, L \in [0,1]$

caso acromatico

if $S = 0$

$$\forall c \in \{R, G, B\} \quad c = L$$

otherwise

$R, G, B \in [0,1]$

$$t_2 = \begin{cases} L \cdot (1+S) & \text{if } L < \frac{1}{2} \\ L + S - L \cdot S & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$t_1 = 2 \cdot L - t_2$$

$$H_1 = \frac{H}{2\pi}$$

$$t_R = H_1 + \tfrac{1}{3}; \text{ if } t_R > 1 \rightarrow t_R = t_R - 1$$

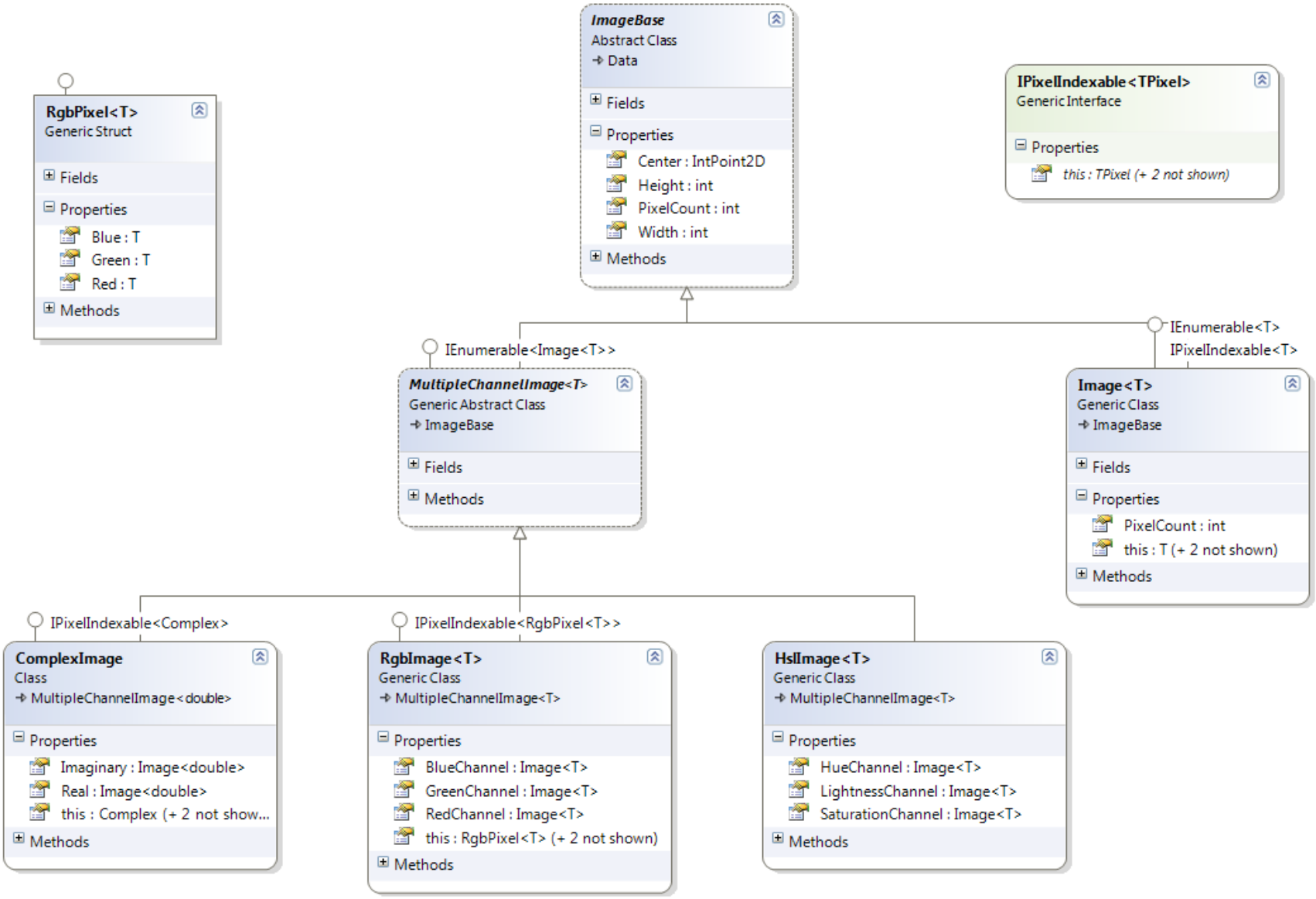
$$t_G = H_1$$

$$t_B = H_1 - \tfrac{1}{3}; \text{ if } t_R < 0 \rightarrow t_R = t_R + 1$$

$$\forall c \in \{R, G, B\}$$

$$c = \begin{cases} t_1 + 6 \cdot (t_2 - t_1) \cdot t_c & \text{if } t_c < \frac{1}{6} \\ t_2 & \text{if } \frac{1}{6} \le t_c < \frac{1}{2} \\ t_1 + 6 \cdot (t_2 - t_1) \cdot (\frac{2}{3} - t_c) & \text{if } \frac{1}{2} \le t_c < \frac{2}{3} \\ t_1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Classi per la gestione di immagini



Operazioni sui pixel

- Su una singola immagine
  - Ogni pixel dell'immagine di uscita è funzione solo del corrispondente pixel dell'immagine di input
  - Esempi principali:
    - Variazione della luminosità
    - Variazione di alcuni dei livelli di grigio: lista dei valori da modificare
    - Conversione da livelli di grigio a (pseudo)colori
    - Binarizzazione con soglia globale

$$\mathbf{I}'[i, j] = f(\mathbf{I}[i, j])$$

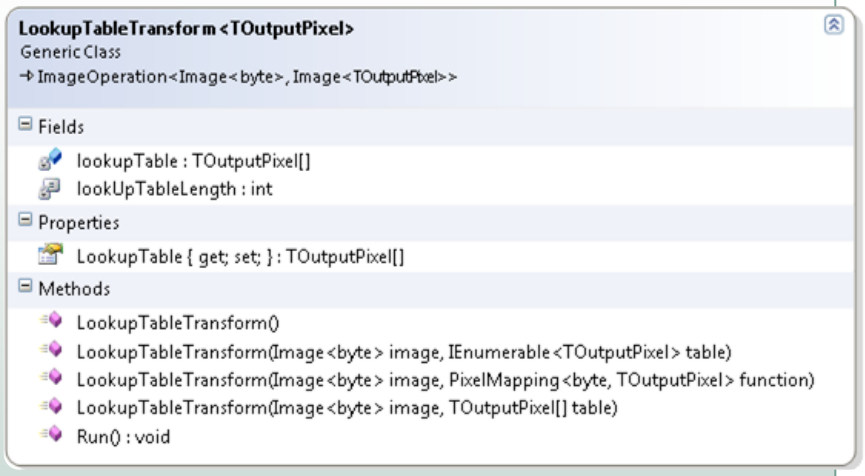
- Su più immagini
  - Ogni pixel dell'immagine di uscita è funzione solo dei corrispondenti pixel delle immagini di input
  - Caso più comune:
    - Operazioni aritmetiche fra due immagini: somma, sottrazione, AND, OR, XOR, ...

$$\mathbf{I}[i, j] = f(\mathbf{I}_1[i, j], \mathbf{I}_2[i, j], \ldots)$$

Operazioni sui pixel (2)

- LookUp Table (LUT)
  - Se il numero di colori o livelli di grigio è inferiore al numero di pixel nell'immagine, è più efficiente memorizzare il risultato della funzione di mapping f per ogni input in un array, da utilizzare poi come LUT per eseguire l'operazione su tutti i pixel

```
[AlgorithmInfo("Look Up Table Transform", Category = "Basic operations")]
public class LookupTableTransform<TOutputPixel> : ImageOperation<Image<byte>, Image<TOutputPixel>>
    where TOutputPixel : struct, IEquatable<TOutputPixel>
{
  private const int lookUpTableLength = 256;
  private TOutputPixel[] lookupTable;

  [AlgorithmParameter]
  public TOutputPixel[] LookupTable
  {
    get
    { return lookupTable; }

   set
    {
      if (value.Length != lookUpTableLength)
        throw new ArgumentException("The lookup table must contain " +
             lookUpTableLength + " elements", "value");
      lookupTable = value;
    }
  }
```



Creazione della Lookup Table

```
public LookupTableTransform(Image<byte> image, TOutputPixel[] table)
  : base(image)
{
  LookupTable = table;
}

public LookupTableTransform(Image<byte> image, PixelMapping<byte, TOutputPixel> function)
  : base(image)
{
  TOutputPixel[] table = new TOutputPixel[lookUpTableLength];
  for (int i = 0; i < lookUpTableLength; i++)
  { table[i] = function((byte)i); }
  LookupTable = table;
}

public override void Run()
{
  Result = new Image<TOutputPixel>(InputImage.Width, InputImage.Height);
  for (int i = 0; i < InputImage.PixelCount; i++)
  {
    Result[i] = lookupTable[InputImage[i]];
  }
}
```

Costruttore a cui si può passare l'array LUT già inizializzato

Costruttore a cui si può passare la funzione di mapping (delegate C#)

Applicazione della LUT

Operazioni sui pixel – Esempi

- Variazione della luminosità

Implementazione 1

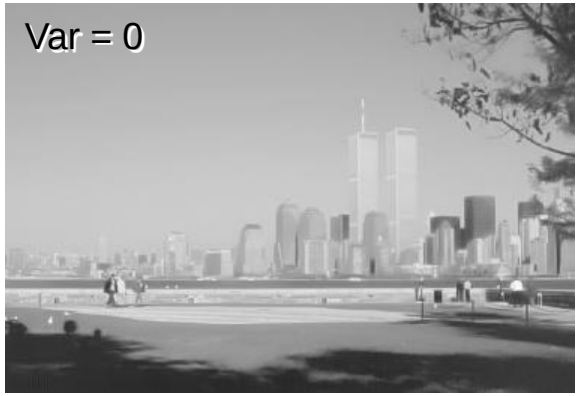
```
byte[] lut = new byte[256];
for (int p = 0; p < 256; p++)
  lut[p] = (p + var * 255 / 100).ClipToByte();
Result = new LookupTableTransform<byte>(img, lut).Execute();
```

Implementazione 2 (con delegate)

```
PixelMapping<byte, byte> f = delegate(byte p)
{ return (p + var * 255 / 100).ClipToByte(); };
Result = new LookupTableTransform<byte>(img, f).Execute();
```

Implementazione 3 (con lambda expr.)

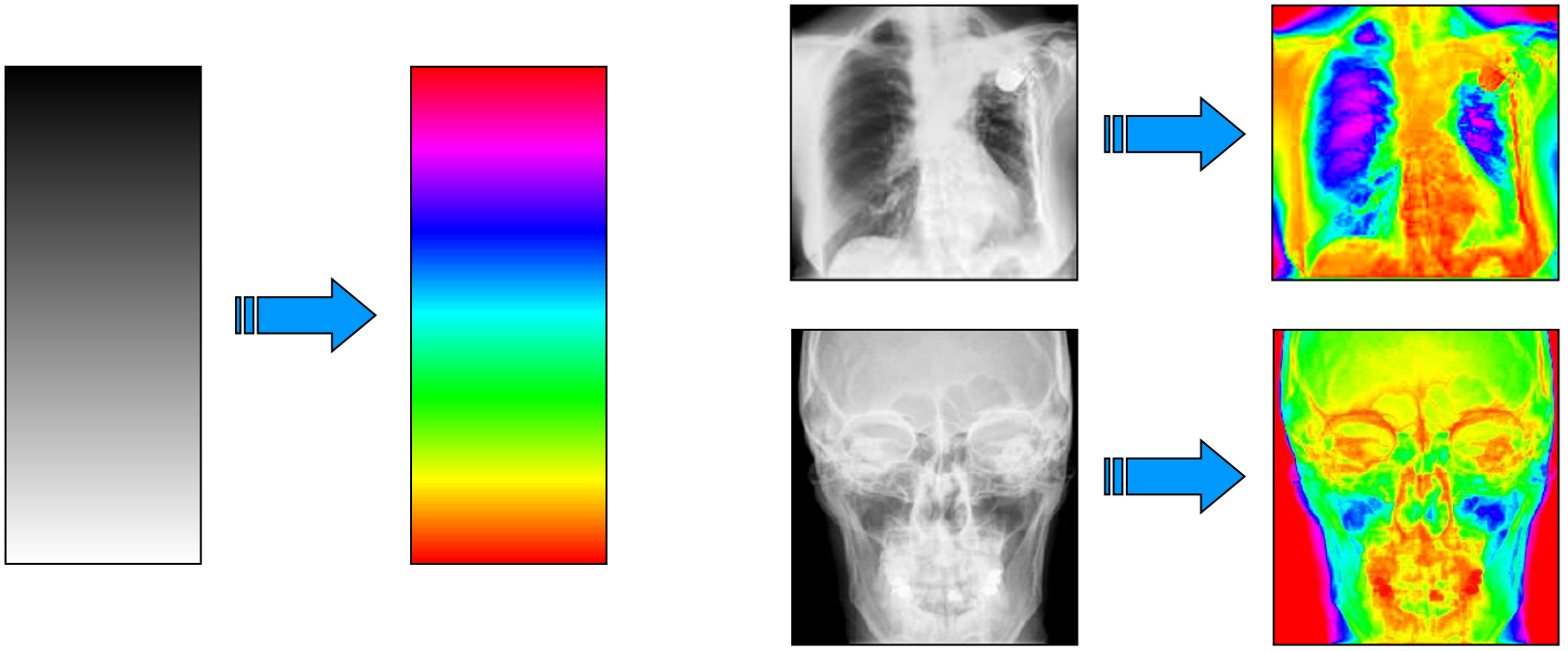
```
PixelMapping<byte, byte> f = p=>(p+var*255/100).ClipToByte();
Result = new LookupTableTransform<byte>(img, f).Execute();
```



Operazioni sui pixel – Esempi (2)

- Esempio di Lookup Table da livelli di grigio a RGB

```
var lut = new RgbPixel<byte>[256] { ... };
var res = new RgbImage<byte>(img.Width, img.Height);
for (int i = 0; i < res.PixelCount; i++)
    res[i] = lut[img[i]];
```



Operazioni sui pixel – Esempi (3)

- Binarizzazione con soglia globale

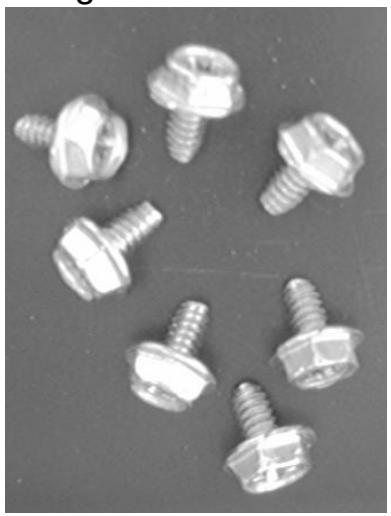
Implementazione 1 (senza LUT)

```
Result = img.Clone();
for (int i = 0; i < Result.PixelCount; i++)
 Result[i] = (byte)(Result[i] < thr ? 0 : 255);
```

Implementazione 2 (con LUT e λ-expr.)

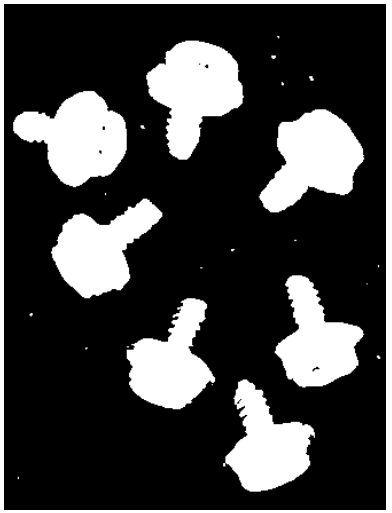
```
var op = new LookupTableTransform<byte>(img, p=>(byte)(p<thr ? 0 : 255));
Result = op.Execute();
```

Originale



Thr = 110

Thr = 132

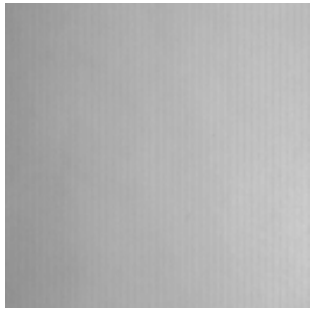


Operazioni aritmetiche fra immagini - Esempi

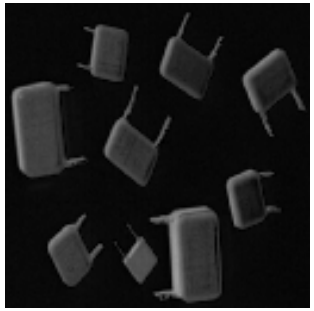
```
Result = new Image<byte>(img1.Width, img1.Height);

for (int i = 0; i < img1.PixelCount; i++)
 Result[i] = (byte)Math.Abs(img1[i] - img2[i]);
```

Img1

Img2



|Img1-Img2|



```
...
 Result[i] = (byte)(img1[i] & img2[i]);
```

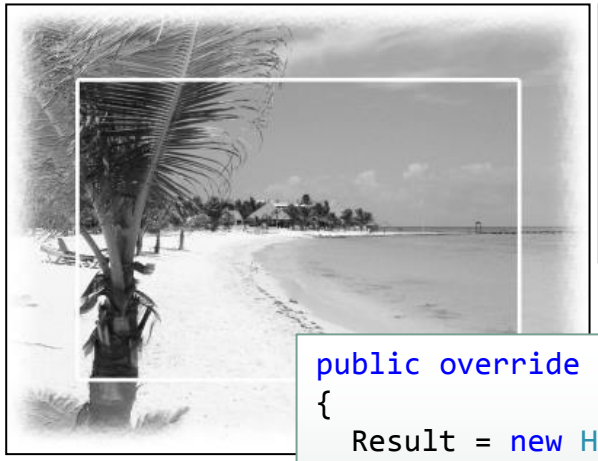
Img1

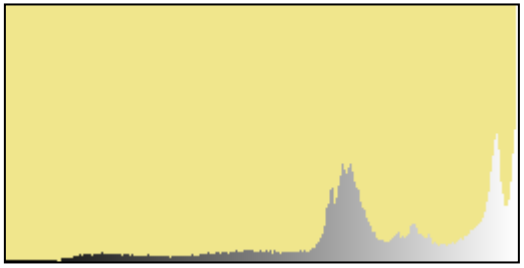
Img2

Img1 AND Img2

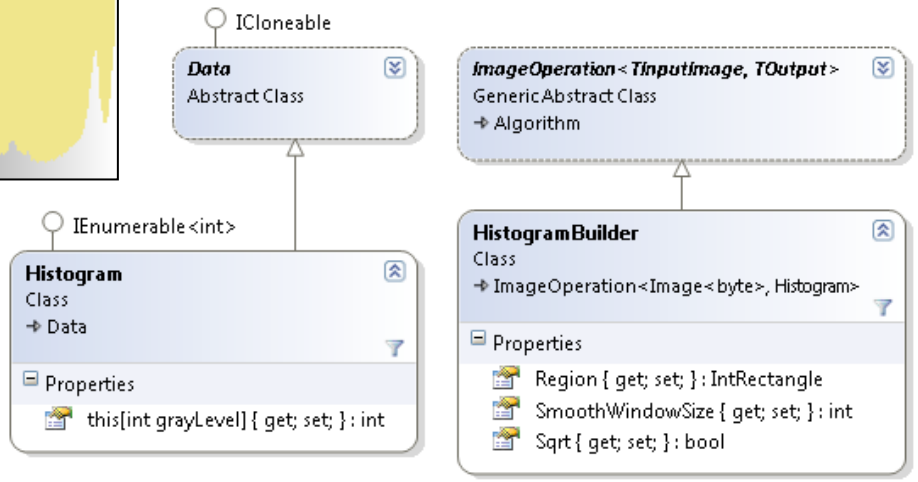
Istogramma di un'immagine grayscale

- Indica il numero di pixel dell'immagine per ciascun livello di grigio
- Dall'istogramma si possono estrarre informazioni interessanti:
  - se la maggior parte dei valori solo "condensati" in una zona, ciò significa che l'immagine ha uno scarso contrasto
  - se nell'istogramma sono predominanti le basse intensità, l'immagine è molto scura e viceversa





```
public override void Run()
{
  Result = new Histogram();
  foreach (byte b in InputImage)
  {
    Result[b]++;
  }
  ...
}
```



Istogramma – Esempi

Immagine scura

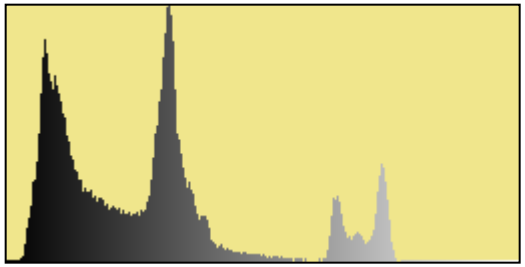
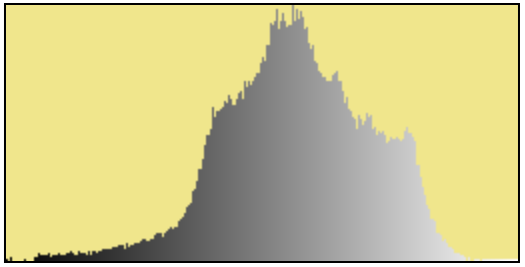


Immagine con poco contrasto



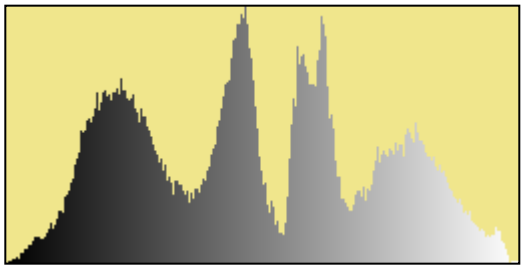
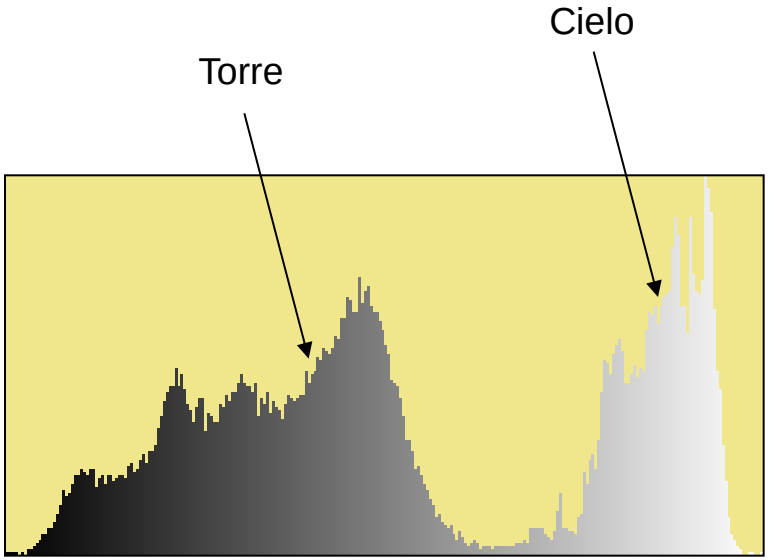


Immagine bilanciata

Analisi dell'istogramma

- Se i diversi oggetti in un'immagine hanno livelli di grigio differenti, l'istogramma può fornire un primo semplice meccanismo di classificazione
  - Esempio: un istogramma bimodale denota spesso la presenza di un oggetto abbastanza omogeneo su uno sfondo di luminosità pressoché costante.

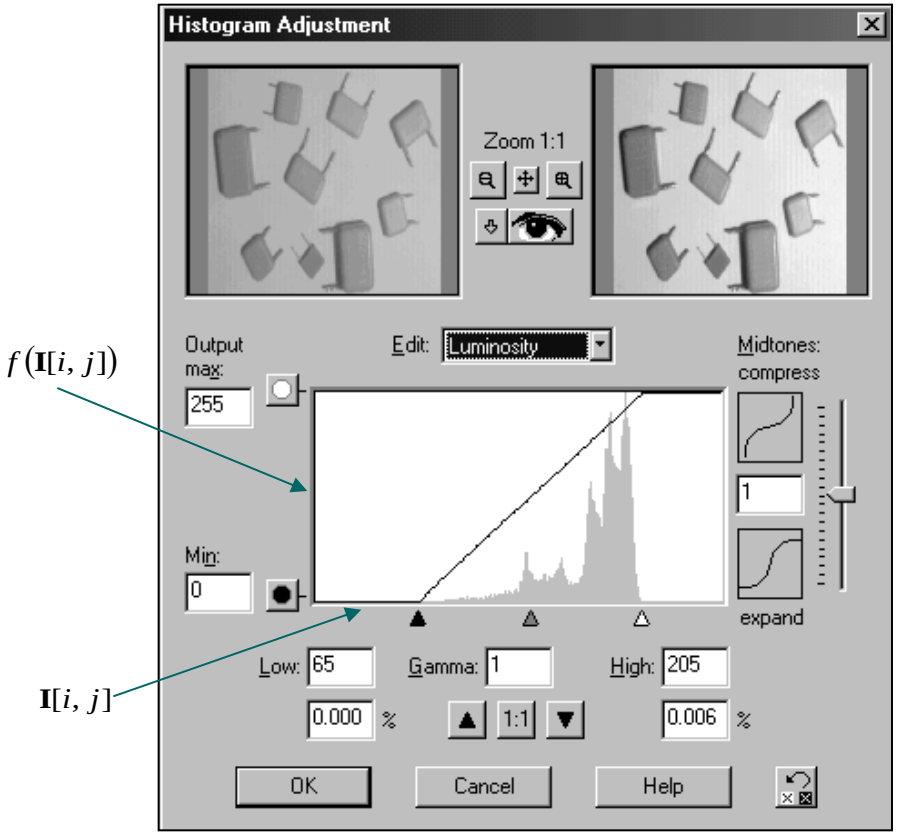


Istogramma e operazioni sui pixel

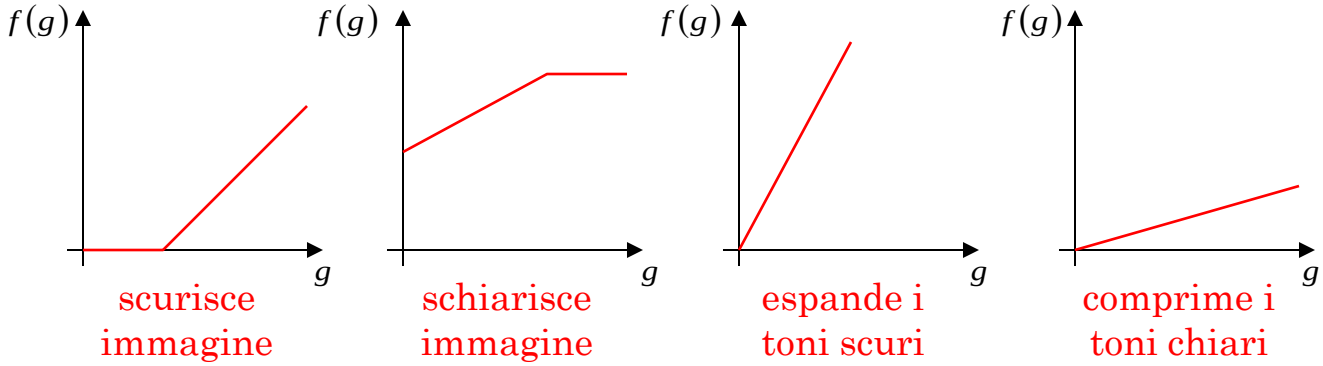
- L'istogramma fornisce informazioni utili a varie operazioni sui pixel

$$\mathbf{I}'[i, j] = f(\mathbf{I}[i, j])$$

- Definendo opportune funzioni di mapping f è possibile:
  - aumentare il contrasto (espansione range dinamico)
  - scurire/schiarire l'immagine
  - evidenziare/nascondere dettagli
  - equalizzare l'istogramma
  - ridurlo a istogramma prefissato



Istogramma e operazioni sui pixel – Esempi



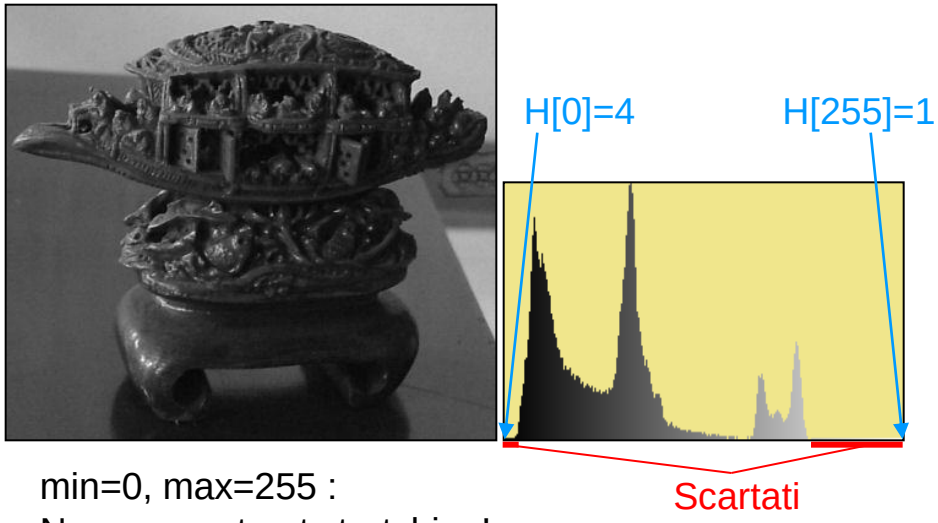
Contrast stretching

- Espansione dei livelli di grigio per aumentare il contrasto
- Si può ottenere con un semplice mapping lineare: $f(g) = 255 \cdot \frac{g - \min\{g_i\}}{\max\{g_i\} - \min\{g_i\}}$

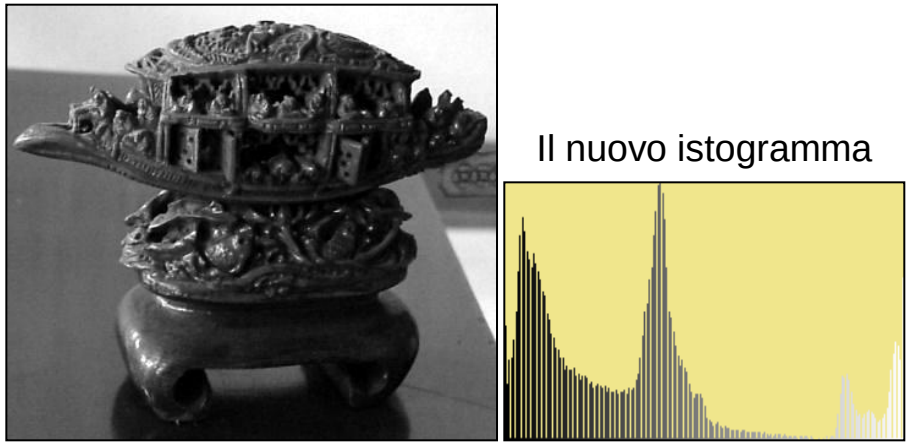
```
byte min = InputImage[0], max = InputImage[0];
for (int i = 1; i < InputImage.PixelCount; i++)
{
  if (InputImage[i] < min) min = InputImage[i];
  else if (InputImage[i] > max) max = InputImage[i];
}

int diff = max - min;
if (diff > 0)
{
  var op = new LookupTableTransform<byte>(InputImage,
                p => (255 * (p - min) / diff).ClipToByte());
  Result = op.Execute();
}
else Result = InputImage.Clone();
```

Contrast stretching (2)

- L'implementazione nel lucido precedente non è molto robusta:
  - È sufficiente un pixel per cambiare la stima del minimo e il massimo
  - Pochi outliers (ad esempio dovuti a rumore nell'immagine) possono compromettere il risultato
- Una tecnica migliore consiste nel scartare una piccola percentuale dei pixel più chiari e più scuri prima di cercare il minimo e il massimo
  - A tale fine si può semplicemente utilizzare l'istogramma



min=0, max=255 :
Nessun contrast stretching!



Ignorando l'**1%** dei pixel ad ogni estremo, si ottiene:
min=11, max=190 : contrasto migliorato

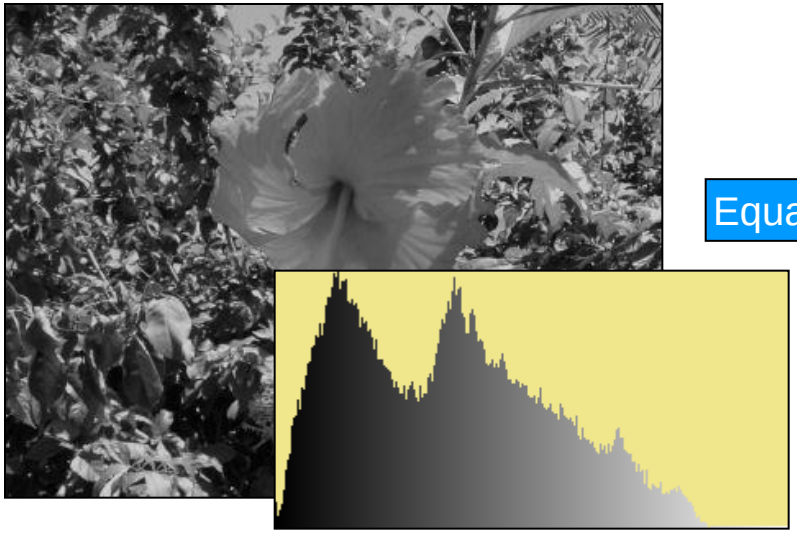
Equalizzazione dell'istogramma

- Una elaborazione molto importante
  - Spesso utilizzata per rendere confrontabili immagini catturate in differenti condizioni di illuminazione
- Obiettivo (ideale):
  - Produrre un'immagine con l'istogramma uniformemente distribuito su tutti i livelli di grigio, ossia distribuire equamente i pixel alle diverse intensità

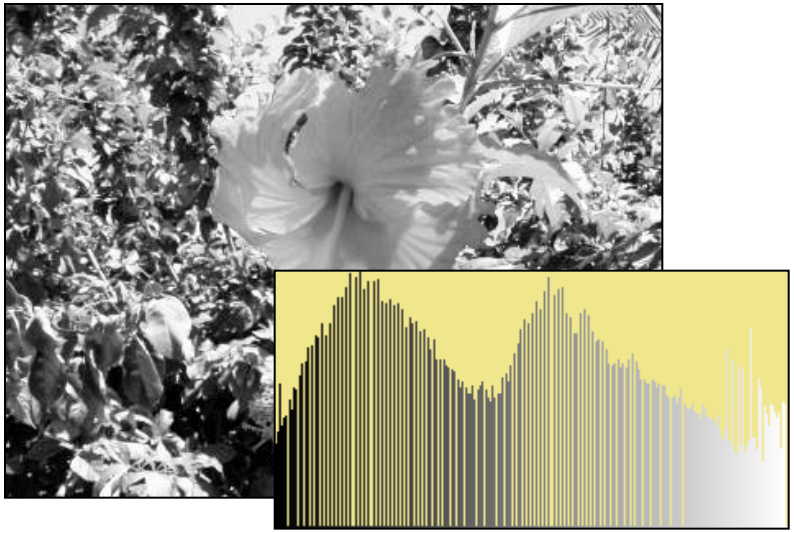
$$f(g) = \frac{255}{\#Pixel} \cdot \int_0^g H(w) \cdot dw \quad \Rightarrow \text{Discretiz.} \quad f(g_i) = \frac{255}{\#Pixel} \cdot \sum_{j=0}^{i} H[g_j]$$

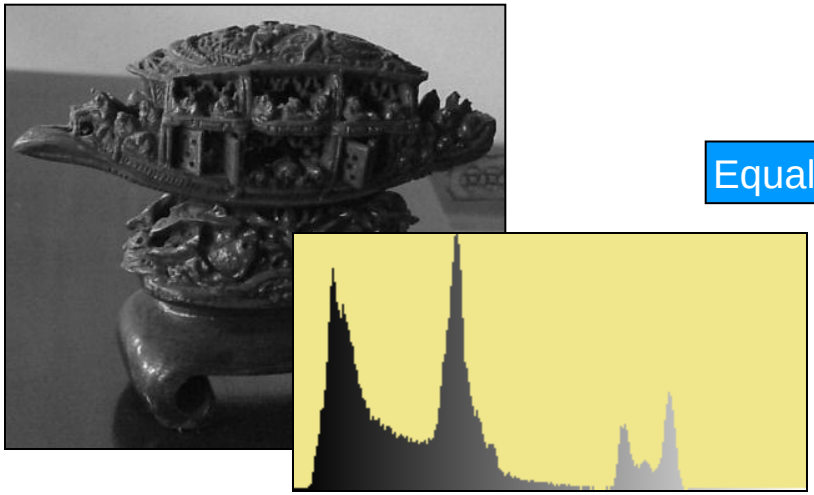
```
// Calcola l'istogramma
var hist = new HistogramBuilder(InputImage).Execute();
// Ricalcola ogni elemento dell'istogramma come somma dei precedenti
for (int i = 1; i < 256; i++)
  hist[i] += hist[i - 1];
// Definisce la funzione di mapping e applica la LUT
var op = new LookupTableTransform<byte>(InputImage,
                          p => (byte)(255 * hist[p] / InputImage.PixelCount));
Result = op.Execute();
```

Equalizzazione – Esempi

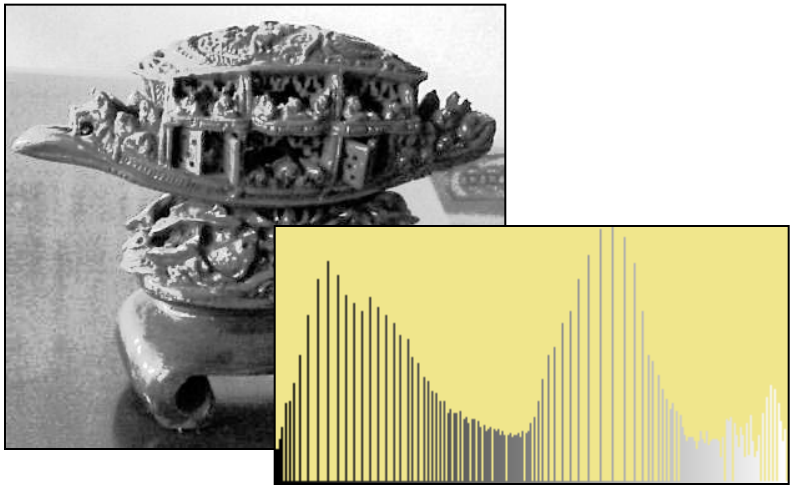


Equalizzazione

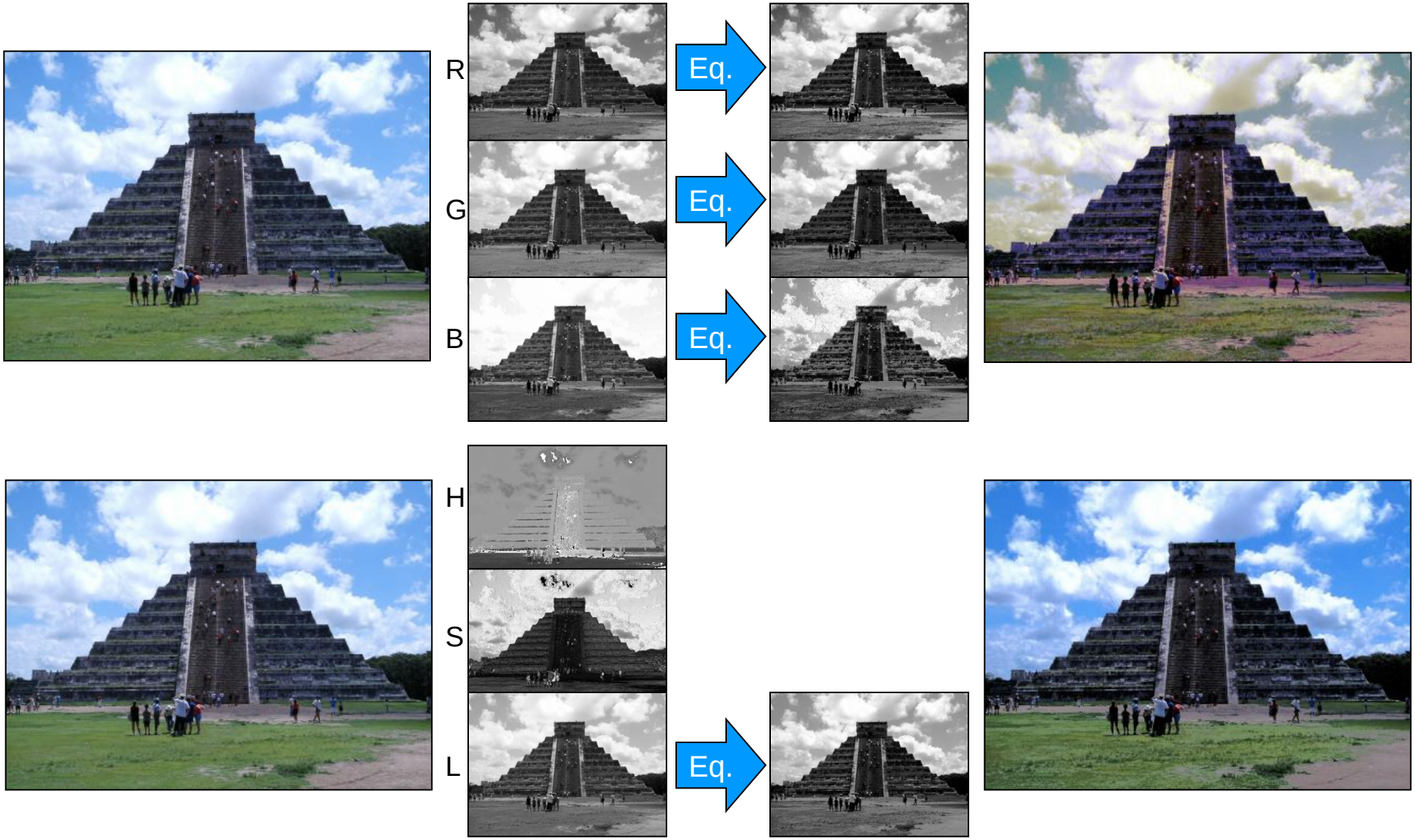




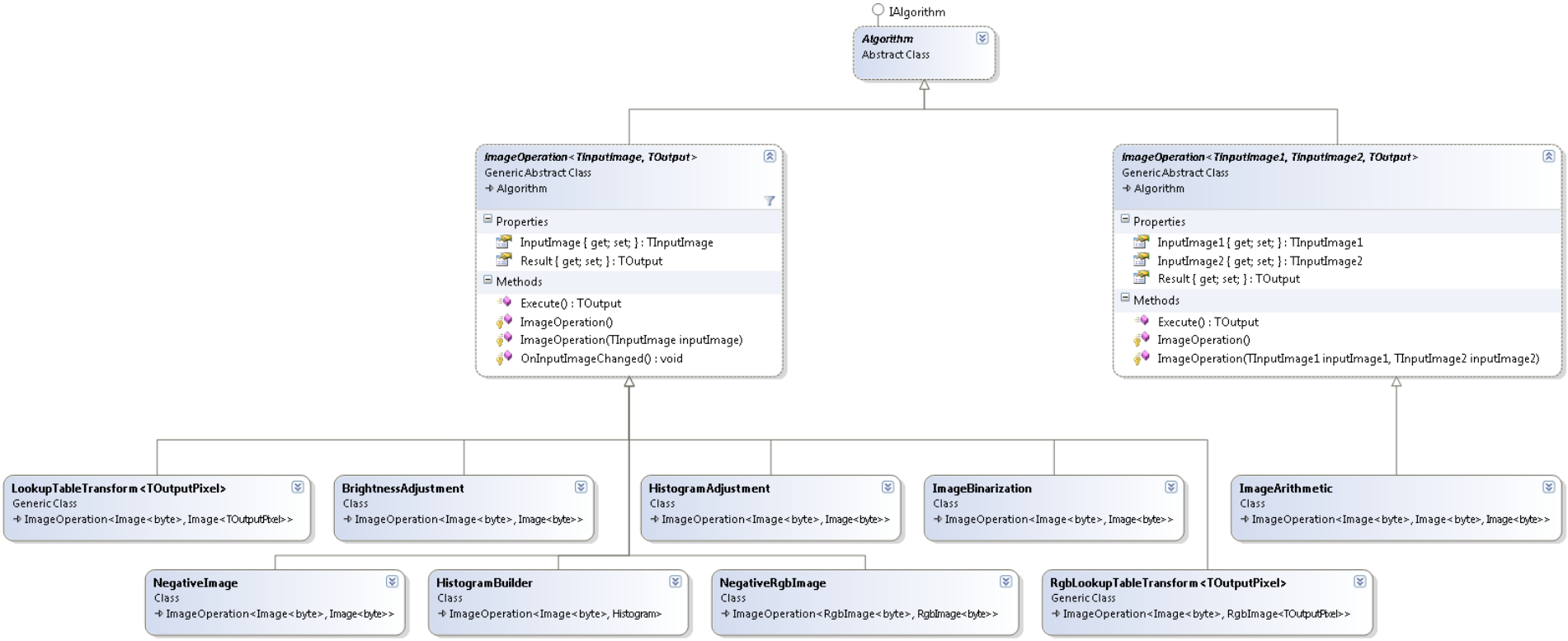
Equalizzazione



Equalizzazione di immagini a colori



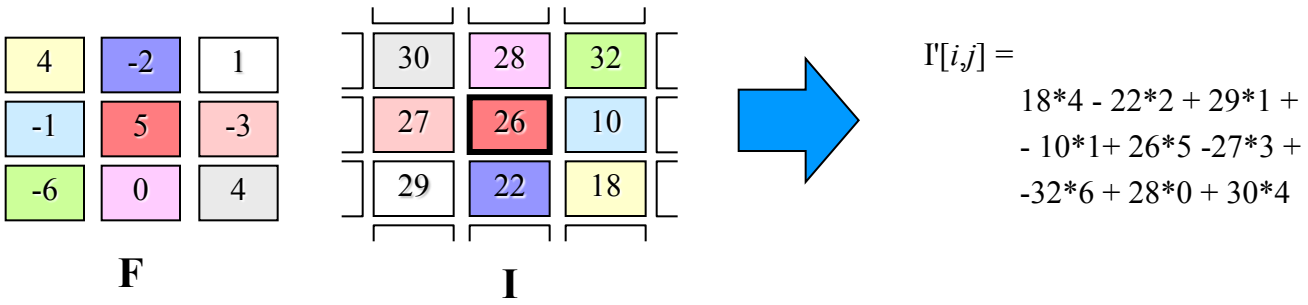
ImageOperation e alcune classi derivate



Filtri digitali e convoluzione

- Filtro digitale:
  - Una maschera discreta di pesi che indicano come ogni elemento dell'immagine debba essere modificato sulla base del valore dei pixel vicini
- Definizioni:
  - Sia F un filtro definito su una griglia mxm (m dispari);
  - L'applicazione di F a un'immagine I nel punto $[i,j]$ modifica il pixel $I[i,j]$ come segue:

$$\mathbf{I}'[i,\ j] = \sum_{y=1}^{m} \sum_{x=1}^{m} \left(\mathbf{I}\left[i + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - y,\ j + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - x\right] \cdot \mathbf{F}[y, x]\right)$$



- Tale operazione di media pesata locale è detta convoluzione nel punto $[i,j]$

Filtri digitali e convoluzione (2)

- Osservazioni
  - Il filtro è ribaltato sui due assi (si notino i due "–" nella formula)
  - Spesso nella pratica la convoluzione viene erroneamente calcolata senza effettuare tale ribaltamento, utilizzando la formula della *correlazione* (con il "+").
    - Ciò è corretto solo per filtri simmetrici rispetto all'origine.
    - Solo utilizzando il segno "-" la convoluzione è: commutativa, associativa e distributiva.
  - Se il risultato della convoluzione deve essere un valore di intensità (ad es. compreso tra 0 e 255), normalmente si esegue una normalizzazione, dividendo il valore risultante per la somma dei pesi del filtro.
    - Altrimenti, in generale, il risultato della convoluzione è un numero con segno

Filtri digitali e convoluzione (3)

- Complessità computazionale
  - Piuttosto elevata: data un'immagine di *n*x*n* pixel e un filtro di *m*x*m* elementi, la convoluzione richiede m^2n^2 moltiplicazioni e altrettante somme.
- Aritmetica intera
  - I calcolatori odierni, benché molto più efficienti che in passato nelle operazioni in virgola mobile, eseguono comunque più velocemente le operazioni in aritmetica intera.
  - Pertanto il calcolo della convoluzione dovrebbe sempre essere eseguito in aritmetica intera (eventualmente discretizzando i pesi del filtro dopo averli moltiplicati per una costante opportuna).

Filtri digitali e convoluzione – Esempi

- Filtri di Smoothing (regolarizzazione):
  - Producono una sfocatura più o meno evidente, in grado di nascondere piccole imperfezioni e brusche variazioni di luminosità
  - Possono essere utili come passo iniziale prima di ulteriori elaborazioni




$$1/9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 1/8 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad 1/25 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtri digitali e convoluzione – Esempi (2)

- Filtri di Sharpening (affilamento):
  - Evidenziano dettagli fini dell'immagine e le brusche variazioni di luminosità (contorni)
  - L'effetto desiderato si ottiene sommando la risposta del filtro all'immagine originale
  - Possono avere effetti indesiderati in presenza di rumore nell'immagine

Immagine originale I

Risultato convoluzione R

$I' = I + k \cdot R$

$F =$

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

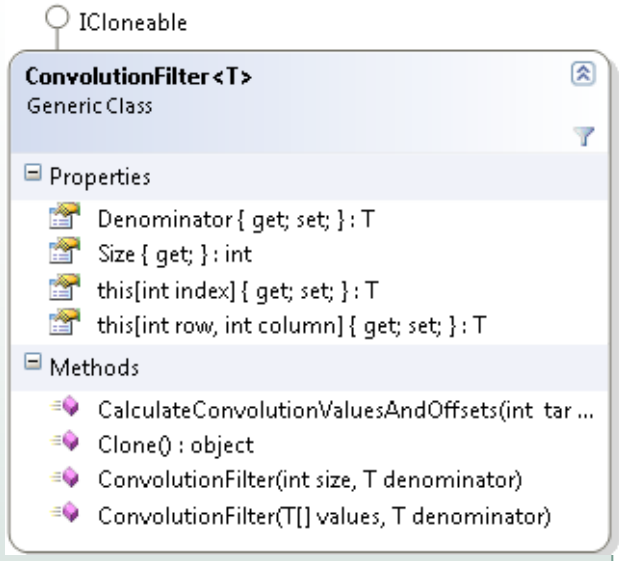
Controlla la forza dell'effetto.
k=0.25 nell'esempio

Convoluzione: aspetti implementativi

- Calcolo del risultato
  - In generale è necessario lavorare su un buffer di appoggio
  - L'approccio più semplice consiste nel produrre il risultato in una nuova immagine
- Problematiche relative ai bordi
  - L'intorno di un pixel non è sempre disponibile: i pixel di bordo non possono produrre risultati corretti
  - Diverse possibilità:
    - Ignorare m/2 pixel di bordo su ogni lato (ad esempio ponendoli a 0 nell'immagine risultante)
    - Supporre che i pixel non disponibili abbiano intensità zero
    - Prolungare i pixel di bordo supponendo intensità costante nei pixel non disponibili
    - ...

Convoluzione: implementazione di base

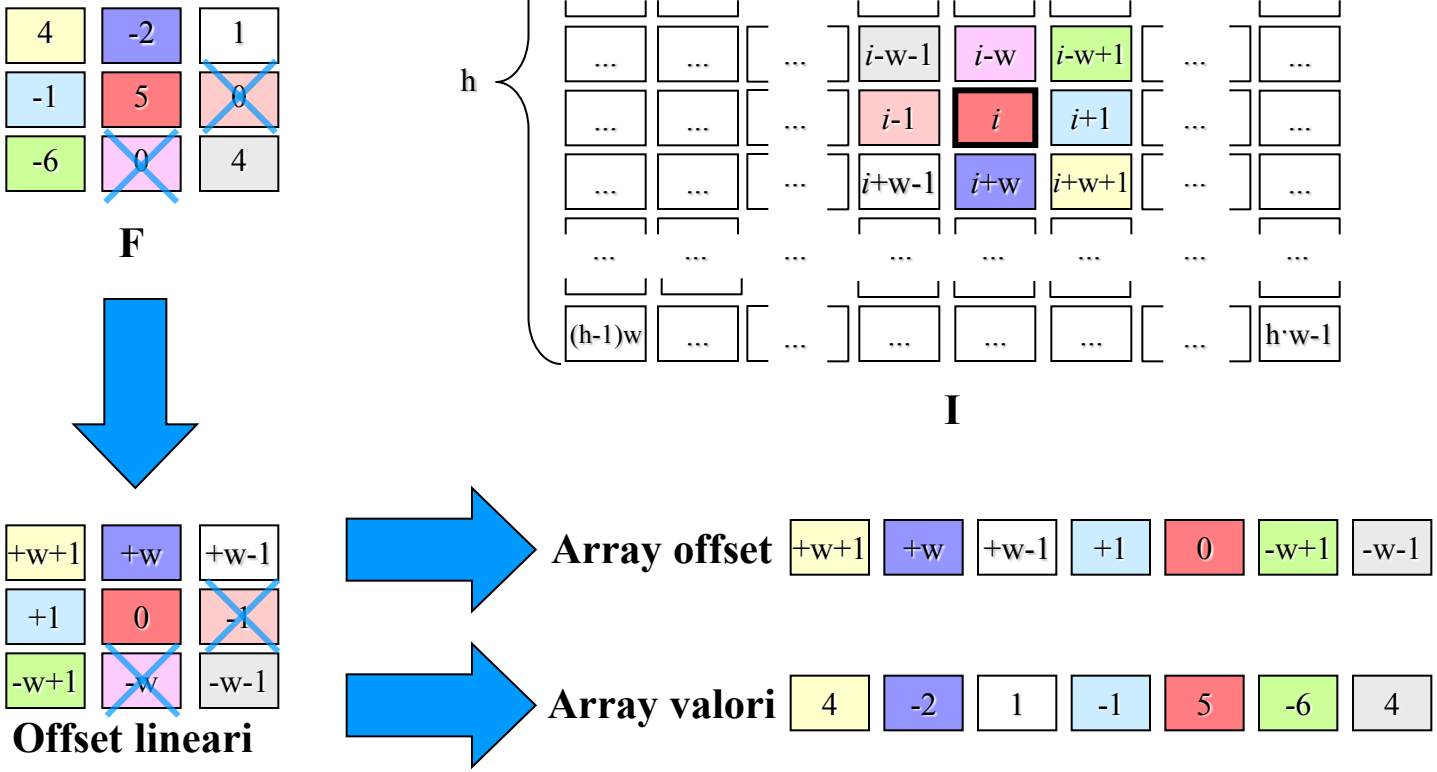
```
Result = new Image<int>(InputImage.Width, InputImage.Height);
int w = InputImage.Width;
int h = InputImage.Height;
int m = Filter.Size;
int m2 = m / 2;
int i1 = m2;
int i2 = h - m2 - 1;
int j1 = m2;
int j2 = w - m2 - 1;

// I bordi in Result restano a 0
for (int i = i1; i <= i2; i++)
  for (int j = j1; j <= j2; j++)
  {
    int val = 0;
    for (int y = 0; y < m; y++)
      for (int x = 0; x < m; x++)
        val += InputImage[i + m2 - y, j + m2 - x] * Filter[y, x];

    Result[i, j] = val / Filter.Denominator;
  }
```



Calcolo efficiente della convoluzione

- L'implementazione nel lucido precedente è piuttosto inefficiente
  - L'accesso ai pixel e ai valori del filtro mediante due indici richiede ogni volta un prodotto e una somma
  - Alcune operazioni (somma/sottrazione di m2 e y) sono inutilmente ripetute nel ciclo più interno
- Un'implementazione più efficiente può essere facilmente ottenuta attraverso la "linearizzazione" del filtro:
  - Si calcolano in anticipo gli offset dei soli elementi diversi da zero rispetto alla posizione del pixel su cui applicare il filtro
  - Permette di operare su vettori monodimensionali (sia per l'immagine che per il filtro)
  - Particolarmente vantaggiosa se molti elementi del filtro sono 0

Filtro “linearizzato” e offset precalcolati



Filtro “linearizzato” e offset precalcolati (2)

```
...
int nM = Filter.Size * Filter.Size;
int[] FOff = new int[nM];
int[] FVal = new int[nM];
int maskLen = 0;
for (int y = 0; y < Filter.Size; y++)
  for (int x = 0; x < Filter.Size; x++)
    if (Filter[y, x] != 0)
    {
      FOff[maskLen] = (m2 - y) * w + (m2 - x);
      FVal[maskLen] = Filter[y, x]; maskLen++;
    }
int index = m2 * (w + 1);   // indice lineare all'interno dell'immagine
int indexStepRow = m2 * 2;  // aggiustamento indice a fine riga (salta bordi)
for (int y = y1; y <= y2; y++, index += indexStepRow)
  for (int x = x1; x <= x2; x++)
  {
    int val = 0;
    for (int k = 0; k < maskLen; k++)
      val += InputImage[index + FOff[k]] * FVal[k];
    Result[index++] = val / Filter.Denominator;
  }
```

Convoluzione: confronto di alcune implementazioni

- Caso di prova:
  - Convoluzione con filtro 15x15 su immagine grayscale 3072x2304
  - Filtro senza valori nulli
  - Pentium IV 3,4GHz con hyperthreading

Implementazione	Tempo di esecuzione (sec)	
	Debug	Release
C# - Impl. di base con array bidimensionali	45.0	16.7
C# - Impl. con offset precalcolati e array monodimensionali	22.8	6.7
C# - Impl. con offset precalcolati e array monodimensionali + codice unsafe (puntatori)	11.1	5.4
C/C++ - Impl. con offset precalcolati e puntatori	14.3	3.1

Calcolo efficiente della convoluzione (2)

- Filtri separabili
  - Un filtro è *separabile* se può essere espresso come prodotto di un vettore colonna per un vettore riga
  - Utilizzando un filtro separabile (*mxm*) è possibile calcolare la convoluzione applicando all'immagine in sequenza due filtri mono-dimensionali anziché un filtro bi-dimensionale
  - La complessità si riduce da $O(m^2n^2)$ a $O(2mn^2)$
  - Nel caso di prova visto in precedenza, il tempo di esecuzione passa da 6.7 sec a 1.1 sec

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x \cdot \mathbf{F}_y^{\,t}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_x \cdot \mathbf{F}_y^{\,t}$$

$$\mathbf{T}[i,j] = \sum_{x=1}^{m} \left(\mathbf{I}\left[i, j + \left\lceil \tfrac{m}{2} \right\rceil - x\right] \cdot \mathbf{F}_x[x] \right)$$

$$\mathbf{I}'[i,j] = \sum_{y=1}^{m} \left(\mathbf{T}\left[i + \left\lceil \tfrac{m}{2} \right\rceil - y, j\right] \cdot \mathbf{F}_y[y] \right)$$

- Trasformata di Fourier
  - Calcolare la convoluzione nel dominio delle frequenze può essere in generale più efficiente, in particolare per filtri a elevata dimensione [→VA2]

Ruotare e ridimensionare un'immagine

- Mapping diretto
  - Sia $f : R\text{x}R \rightarrow R\text{x}R$ una funzione che mappa ogni pixel della vecchia immagine nella nuova; ad esempio, nel caso di trasformazioni affini (traslazione $[t_x, t_y]$ + rotazione θ + scala s), la funzione è:

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

- Eseguendo tale trasformazione a partire da una scansione dell'immagine di partenza, si hanno i seguenti problemi:
  - Valori dei nuovi pixel non necessariamente interi (approssimazione)
  - Alcuni pixel vengono mappati al di fuori della nuova immagine
  - Alcuni pixel della nuova immagine non sono coperti ("buchi")

Ruotare e ridimensionare un'immagine (2)

- Mapping inverso
  - Un modo efficace di risolvere tali problemi consiste nell'eseguire la scansione della nuova immagine e, per ogni pixel $[x_{new},y_{new}]$, determinare il punto di riferimento $[x_{old},y_{old}]$ nella vecchia immagine attraverso la funzione inversa f^{-1}.

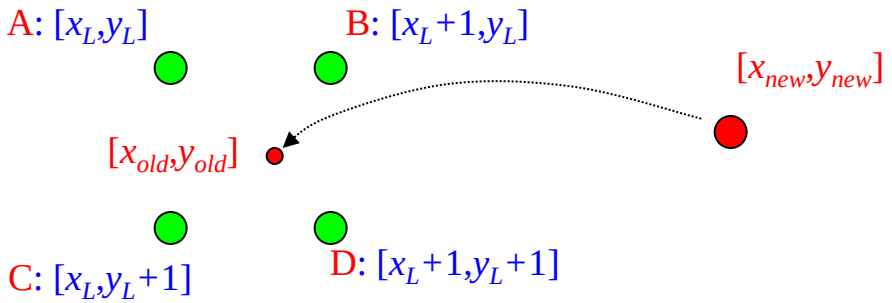
$$\begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \right)$$

  - Il punto di riferimento $[x_{old},y_{old}]$, che è in coordinate continue (floating point), potrebbe cadere:
    - 1) fuori dalla vecchia immagine: tipicamente si utilizza un valore fisso (colore dello sfondo se noto, oppure nero)
    - 2) su di un pixel della vecchia immagine: se ne copia l'intensità
    - 3) in una posizione intermedia tra 4 pixel della vecchia immagine: si può applicare una tecnica di interpolazione (vedi lucido seguente)

Ruotare e ridimensionare un'immagine (3)

- Interpolazione di Lagrange
  - Il valore di intensità del nuovo pixel $[x_{new},y_{new}]$ viene calcolato cercando il piano che meglio approssima i 4 pixel (ai minimi quadrati)
  - $I'(x,y)$ e $I(x,y)$ indicano l'intensità dei pixel nella nuova e vecchia immagine rispettivamente, e w_A, w_B, w_C, w_D i pesi

$$w_A = (x_L + 1 - x_{old}) \cdot (y_L + 1 - y_{old})$$
$$w_B = (x_{old} - x_L) \cdot (y_L + 1 - y_{old})$$
$$w_C = (x_L + 1 - x_{old}) \cdot (y_{old} - y_L)$$
$$w_D = (x_{old} - x_L) \cdot (y_{old} - y_L)$$



$$I(x_{new},y_{new}) = \frac{I(A)\cdot w_A + I(B)\cdot w_B + I(C)\cdot w_C + I(D)\cdot w_D}{\underbrace{w_A + w_B + w_C + w_D}_{=1}}$$